

Giảng dạy đại số, số học với sự hỗ trợ của phần mềm Mathcad

1. Một số ưu điểm của phần mềm Mathcad

1.1. Một số ưu điểm.

(Là phần mềm toán học được sinh viên, cán bộ giảng dạy, nghiên cứu toán,... sử dụng rộng rãi.

(Mathcad bao quát một lớp khá rộng các lĩnh vực của toán học: Giải tích, Đại số, Số học, Xác suất...

(Dùng để lập trình giải các bài toán phức tạp, tính toán không những bằng số mà còn trên các tham số (Symbolics). Lệnh của Mathcad để nhớ và vận dụng những lệnh cơ bản nằm trong các menu.

(Mathcad được thiết kế theo phương pháp hướng đối tượng: mỗi công thức, một đoạn văn bản, ... hiển thị là một vùng trên trang làm việc, có thể di chuyển bất kỳ vị trí nào trên trang làm việc, có thể thể định dạng về phông chữ, màu sắc, phóng to, thu nhỏ khi cần thiết.

Kết luận: Với những ưu điểm trên đây chúng ta có thể vừa soạn thảo văn bản, vừa làm việc khác nhau của toán học: tính toán, vẽ đồ thị, giải các dạng toán khác nhau có Đại số, số học vừa giải thích,... các công việc đó không khác văn bản bao nhiêu về hình thức tạo nên hứng thú học tập với Đại số, Số học,...



1.2. Một số minh họa

1.2.1. Tính xấp xỉ giá trị của biểu thức số

$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx = 0.429$$
$$\frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)} = 0.578$$
$$\sum_{i=1}^{20} \frac{i^2}{i!} = 5.437$$
$$+ \begin{vmatrix} 1.12 & 2 & 3 \\ 0.21 & 3 & 5 \\ 0.11 & 0 & 1.3 \end{vmatrix} = 3.932$$

1.2.2. Tính đúng giá trị của biểu thức.

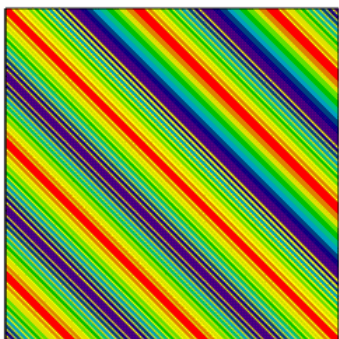
$$\sum_{i=1}^{20} \frac{i^2}{i!} \rightarrow \frac{2422459091299663}{445586448384000}$$

$$+ \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx \rightarrow 2 - \frac{1}{2} \cdot \pi$$

1.2.3. Về tìm hoa văn thông qua về mặt countou của một ma trận.

Để thiết kế các hoa văn của gạch lát nhà, trang trí, ... chúng ta có thể lấy mẫu bằng cách vẽ mặt countou của một ma trận. Sau đây là một số ví dụ:

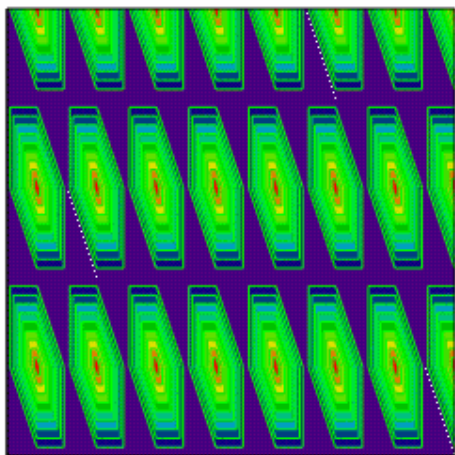
$$m := 0..5 \quad n := 0..5 \quad B_{m,n} := \text{mod}(m+n, 3, 2)$$



B

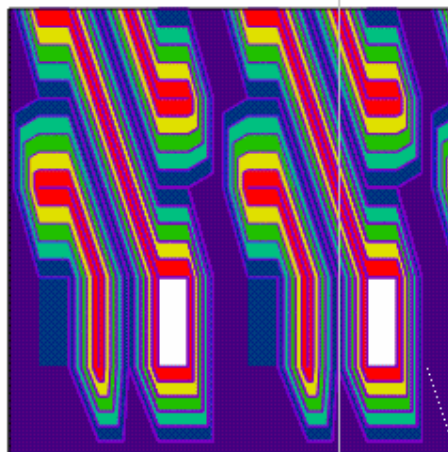
$$m := 0..15 \quad n := 0..9$$

$$A_{m,n} := \text{mod}(m \cdot n, 2)$$



A

$$C_{m,n} := \text{mod}[(m \cdot n)^3, 7]$$



C

2. Thực hiện các phép tính số học, đại số

2.1. Các lệnh Mathead thực hiện với phép tính số học

(Tính toán với số nguyên (kết quả tính đúng, gần đúng)

(Phân tích thành thừa số nguyên tố.

(Tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên

(Tìm dư của phép chia a cho b (a, b nguyên).

(Tìm tổng hữu hạn vô hạn.

(xem từ trang 85 đến trang 87 tài liệu phát)

giải các bài tập sau

1. Tính giá trị của các biểu thức sau (với 5 chữ số thập phân).

$$1 - \frac{2}{3 + \frac{3}{4}} \quad \sqrt{2 + \sqrt{2\sqrt{2}}} \quad \sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

Chú ý: gõ \ để
có:

$\sqrt{\quad}$

Gõ Ctrl + \ để có

$\sqrt[3]{\quad}$

2. Thực hiện:

a. Tìm ước chung lớn nhất của 157940 và 78864.

b. Tìm bội số chung nhỏ nhất của 18230 và 3224

c. Tìm bội chung nhỏ nhất của 22006 và $270 + 230$

$$\text{mod } (22006, 10) (6$$

$$\text{mod } (270 + 370, 10) (3$$

3. Phân tích $2^{2^5} + 1$ ra thừa số nguyên tố.

4. Tính giá trị của biểu thức:

$$\left| \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right|$$

5. a) Tìm dư của 242 khi chia cho 11.

b) số 61065 có chia hết cho 55 hay không.

2.2. Các lệnh của Mathcad liên quan đến đại số.

(Phân tích đa thức thành nhân tử

(Khai triển các biểu thức Đại số

(Tính giá trị của biểu thức

Xem trong tài liệu từ trang 88 đến 91

Bài tập

1)Triển khai nhị thức $(x + 2y)^7$

2) Đơn giản biểu thức (đề thi học sinh giỏi miền Bắc 1961-1962).

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

3) Chứng minh hằng đẳng thức sau:

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2+an+ab+bn}{3bn-a^2-an+3ab}$$

4) Rút gọn:

$$\cos 4x + \sin 4x + 2\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 2x$$

5) Tối giản biểu thức:

$$\frac{x^8 + 3x^4 + 4}{x^4 + x^2 + 2}$$

$$6) \text{ Cho } M = \frac{8x^6 - 27}{4x^4 + 6x^2 + 9} \quad \text{và} \quad N = \frac{y^4 - 1}{y^3 + y^2 + y + 1}$$

(Đề thi học sinh giỏi cấp 2 miền Bắc 1970-1971)

a) Rút gọn $\frac{M}{N}$

b) Tính giá trị của $\frac{M}{N}$ khi $x = 8$; $y = 251$

Hướng dẫn:

$$C1: \text{ Khai báo } A(x,y) = \frac{8x^6 - 27}{4x^4 + 6x^2 + 9} : \frac{y^4 - 1}{y^3 + y^2 + y + 1}$$

$$A(8, 251) = 1/2.$$

C2: (Sau khi khai báo (1)

(Đặt con trỏ ở vị trí: A(x, y)

(Chọn simplify, chọn tiếp substitute.

2.3. Các lệnh thực hiện với Đại số tuyến tính.

(Các lệnh nhập vectơ, ma trận, tính toán với các ma trận

(Giải hệ phương trình Cramer

(Xem trang 107, 109)

(Chú ý Mathcad quy ước dòng, cột đầu tiên trong cột ma trận là dòng 0, cột 0. Muốn đổi thành dòng 1, cột 1 trong trang làm việc chúng ta thực hiện như sau:

- Bước 1: Vào Tools/work sheet Options)

- Bước 2: Trong menu trải ra ở dòng Array Origin (ORIGIN)

thay 0 bằng 1 rồi chọn OK.

(Lấy ra một phần tử hay một cột của ma trận.

Giả sử ta đã nhập được một ma trận trong Mathcad là:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Để lấy ra phần tử $A_{i,j}$ của ma trận A

Gõ $A[1,1 =$ (Enter) ta có:

$$A_{1,1} = 1; A_{4,3} = 2$$

+ Lấy ra cột 3 của ma trận A

Bước 1: Chọn [: :] trong View/Tools/Matrix) bảng sau hiện ra



Bước 2: Chọn M<>

Ta có (< >

Bước 3: Điền vào ô trống A<3> = (gõ dấu =)

Ta có kết quả $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Tìm ma trận chuyển vị.

+ Nhập ma trận A

+ Chọn ký hiệu MT trong bảng matrix

Ta có: T

+ Điền A vào ô trống rồi gõ dấu bằng =

Ví dụ A : = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

(Tìm định thức của một ma trận vuông

+Chọn ký hiệu $|x|$ trong bảng matrix

Ta được ký hiệu: $| \blacksquare |$

+ Trong ô chữ nhập ma trận vuông cần tìm định thức

Ví dụ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -7.371 (103$

(Tìm ma trận nghịch đảo

Bước 1: Chọn ký hiệu X-1 trong bảng matrix

Ta được \blacksquare^{-1}

Bước 2: Nhập ma trận vuông cần tìm nghịch đảo vào ô chờ. gõ dấu =
ta có kết quả.

Ví dụ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.086 & -0.257 & 0.152 \\ -0.057 & 0.171 & 9.524 \times 10^3 \\ 0.343 & -0.029 & -0.057 \end{pmatrix}$$

(Tạo ma trận con của một ma trận

Cho ma trận A kiểu (m, n) muốn có một ma trận con B của A mà các phần tử của nó lấy từ dòng c đến dòng (; cột lấy từ r đến s của A ta sử dụng lệnh:

$B := \text{submatrix}(A, i, (, r, s)$

Ví dụ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Tạo ma trận con B của A với các phần tử từ dòng 1 đến dòng 2, từ cột 2 tới cột 3 của A.

$B = \text{submatrix}(A, 1, 2, 2, 3)$

Ta có kết quả:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Nối hai ma trận

A, B là hai ma trận cùng kiểu, chúng ta có thể nối B vào bên dưới A bằng lệnh

$\text{Stack}(A, B)$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{Satch}(A, B) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -7 \\ 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- Nối ma trận B vào bên phải ma trận A (hai ma trận cùng kiểu) bằng cách sử dụng lệnh `augment(A,B)`.

Ví dụ Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ và } B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}; \text{ Hãy ghép B vào bên phải của A.}$$

$$\text{Augment}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

- Tìm hạng của ma trận A

rank(A)

- Tìm vector riêng, giá trị riêng

Sử dụng lệnh `eigenvals(M)` : Tìm giá trị riêng của ma trận M.

Ví dụ. Tìm các giá trị riêng của ma trận A sau đây

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Giải.

$$U := \text{eigenvals}(A)$$

$$U = \begin{bmatrix} 3.732 \\ 0.268 \\ 4 \end{bmatrix}. \text{ Có nghĩa ma trận đã cho có ba giá trị riêng là}$$

các phần tử ở ma trận cột của U: $U_1 = 3,732$; $U_2 = 0,268$; $U_3 = 4$.

+ Để tìm các vector riêng ứng với giá trị riêng U_1 ta dùng hàm sau: `v := eigenvec(A, U1)`. Ta có kết quả sau:

$$v = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.866 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bài tập: Sử dụng phần mềm Mathcad giải hoặc tìm ra hướng giải cho các bài toán sau

1. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 1 \\ 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 3 \\ 3x_1 + x_2 + 11x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 1. \end{cases}$$

3. Chứng minh rằng với mọi a, b, c hệ phương trình sau đây luôn có nghiệm

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = a^3 \\ x + by + b^2z = b^3 \\ x + cy + c^2z = c^3. \end{cases}$$

4. Trong không gian R³ cho hai cơ sở

$$(1 = (1, 0, 0), 2 = (0, 1, 0), 3 = (0, 0, 1)) \quad (1)$$

$$(1 = (2, -1, 3), 2 = (-3, 1, -2), 3 = (0, 4, 5)). \quad (2)$$

a) Tìm ma trận chuyển từ cơ sở (1) sang cơ sở (2).

b) Tìm tọa độ của vectơ a = (-1, 2, 0) với cơ sở (2).

4) Các hệ vectơ sau:

$$a_1 = (1, -2, 1, 0, 0), a_2 = (1, -2, 0, 1, 0), a_3 = ((0, 0, 1, -1, 0)) \quad (1)$$

$$b_1 = (1, -2, 1, 0, 0), b_2 = (0, 0, -1, 1, 0), b_3 = (4, 0, 0, -6, 2). \quad (2)$$

Hệ nào là hệ nghiệm cơ bản của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

5. Cho ánh xạ tuyến tính f từ R^3 vào R^3 xác định bởi

$f(a_1) = (-2, 3)$, $f(a_2) = (0, 5)$, $f(a_3) = (7, -1)$, trong đó $\{a_1, a_2, a_3\}$ là cơ sở chính tắc của R^3 .

a) Tìm ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc của hai không gian vectơ trên.

b) Tìm $f(a)$ với $a = (5, -1, 1)$.

6. Cho phép biến đổi tuyến tính f từ R^4 vào R^4 có ma trận đối với cơ sở chính tắc là

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Tìm tọa độ $f(a)$ với $a = (2, 5, 1, -2)$.

b) Tìm Kerf.

7. Cho Hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -7 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Tìm ma trận X sao cho:

a) $A - X = B$.

b) $3B + 2X = A$.

c) $5X - 2A = 4B$.

8. Cho hai ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 3 & 5 \\ 7 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tính AB và BA. Có kết luận gì về tính giao hoán của phép nhân ma trận.

9. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ và $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Tính $f(A)$.

10. Tìm vectơ riêng của các tự đồng cấu có ma trận sau:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & -8 \\ 2 & -4 & 7 & -4 \\ 1 & -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

11. Cho f từ R^3 vào R^4 và g từ R^4 vào R^3 xác định như sau:

$$f(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1, a_2, a_1 - a_2, a_3); \quad g(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 + a_2, a_3, a_4).$$

a) Tìm ma trận của f và ma trận của g đối với các cơ sở chính tắc trong R^3 và R^4 .

b) Tìm ma trận của g và ma trận của f đối với các cơ sở chính tắc.

c) Trong hai đồng cấu gf và fg ánh xạ nào là đẳng cấu. Tìm ma trận của ánh xạ ngược của đẳng cấu.

d) Tìm một cơ sở của $\text{Ker}(fg)$ và cơ sở của $\text{Im}(fg)$.

e) Tìm các giá trị riêng và các không gian con bất biến tương ứng của gf và fg .

f) Trong hai ma trận của gf và fg ma trận nào chéo hoá được. Hãy chéo hoá trong trường hợp có thể.

12. Tìm hạng của hệ vectơ sau trong R^4

$$a = (-1, 2, 0, 1), \quad b = (1, 2, 3, -1), \quad c = (0, 4, 3, 0).$$

13. Tìm giá trị của x để hạng của ma trận A sau đây bằng 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & x & 6 \end{bmatrix}.$$

14. Trong R^4 cho hai hệ vector

$$a = (0,1,0,2), b = (1, 1, 0,1), c = (1, 2, 0, 1) , d = (-1,0,2,1) \quad (1)$$

$$a' = (1,0,2,-1), b' = (0, 3, 0, 2), c' = (9, 1, 3, 1).$$


i) Chứng minh rằng (1), (2) là các cơ sở của R^4 .

ii) Tìm ma trận chuyển từ (1) sang (2).

Phần I. Tóm tắt những kỹ năng cơ bản sử dụng Sketchpad.



1. Vẽ điểm

- Có hai cách:

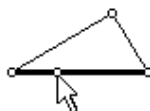
+ Dùng Point Tool  trên thanh công cụ Toolbox : Dùng để vẽ một hay nhiều điểm trên mặt phẳng hoặc trên một đối tượng nào đó (đường, miền).

+ Lệnh Point on object trong menu Construct : Dùng để vẽ 1 điểm trên một hay nhiều đối tượng (đường, miền).

- Thao tác:

+ Vẽ 1 điểm bất kỳ: kích  trái chuột vào công cụ Point Tool trên hộp Toolbox, chuột bây giờ  dạng

ta đưa chuột vào vùng cần vẽ điểm hoặc đưa con trỏ chuột tới vị trí cần vẽ điểm trên đối tượng thì đối tượng sáng lên, thì ta kích nút trái chuột.



+ Vẽ một điểm trên đối tượng bằng lệnh: Construct/Point on (object)

Chọn đối tượng: kích nút trái chuột vào đối tượng

Thực hiện lệnh : Construct/Point on (object)

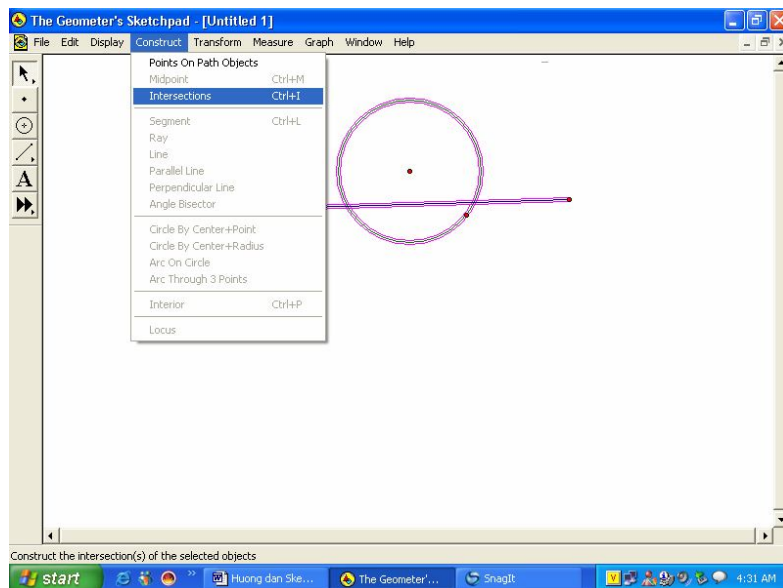
+ Vẽ giao điểm của hai đường có hai cách:

- Kích nút trái chuột vào vị trí giao điểm của hai đối tượng.

Hoặc:

- Chọn đồng thời hai đường cần xác định giao điểm

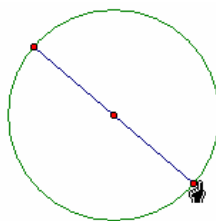
- Thực hiện lệnh : Construct/Intersections



2. Đặt tên điểm:

Sử dụng công cụ Text Tool  trên hộp Tool box.

- Thao tác: kích nút trái chuột vào công cụ Text Tool di chuyển con trỏ tới điểm cần đặt tên khi con trỏ chuột có dạng bàn tay đổi màu đen thì ta kích nút trái:



- Muốn sửa tên điểm thì nháy đúp chuột vào tên điểm (hoặc nháy chuột phải vào điểm và chọn Label point), gõ lại tên điểm trong cửa sổ Label, rồi chọn OK hoặc Enter.



3. Vẽ đoạn thẳng, đường thẳng, tia

Có hai cách: Sử dụng công cụ Straightedge Tool trên hộp Toolbox hoặc sử dụng menu Construct với một trong các lệnh:

Segment (đoạn thẳng),


Ray (tia),


Line (đường thẳng).

- Thao tác: sử dụng một trong hai cách sau:

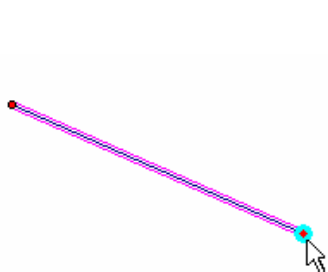
+ Dùng công cụ Straightedge Tool: kích nút chuột trái và nháy

chuột vào nút  để vẽ đoạn thẳng,

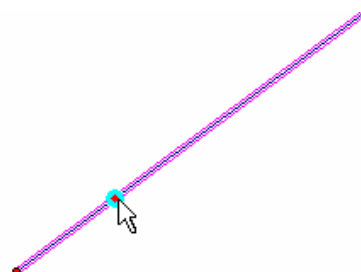
hoặc  để vẽ tia,

hoặc  để vẽ đường thẳng,

Sau đó đưa chuột vào vùng vẽ, nhấn giữ nút trái và di chuột để tạo đường rồi thả nút để kết thúc.



Vẽ đoạn thẳng

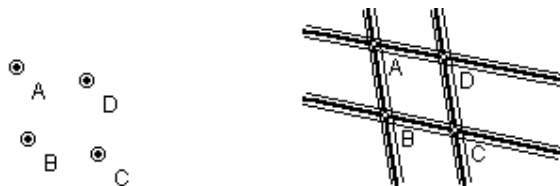


Vẽ tia



Vẽ đường thẳng

+ Sử dụng lệnh trong Menu Construct: chọn hai điểm, sau đó vào Menu Construct chọn công cụ Segment, Ray hoặc Line.



Nháy chuột vào Segment: Vẽ đoạn thẳng có hai điểm đó là đầu mút

vào Ray : Vẽ tia, điểm thứ nhất là gốc tia

vào Line : Vẽ đường thẳng đi qua hai điểm đó

4. Vẽ trung điểm của đoạn thẳng:

- Sử dụng lệnh Construct/Midpoint.

Thao tác:

- Đánh dấu chọn đoạn thẳng cần lấy trung điểm.
- Lệnh Construct / Midpoint (vào menu Construct rồi chọn Midpoint).



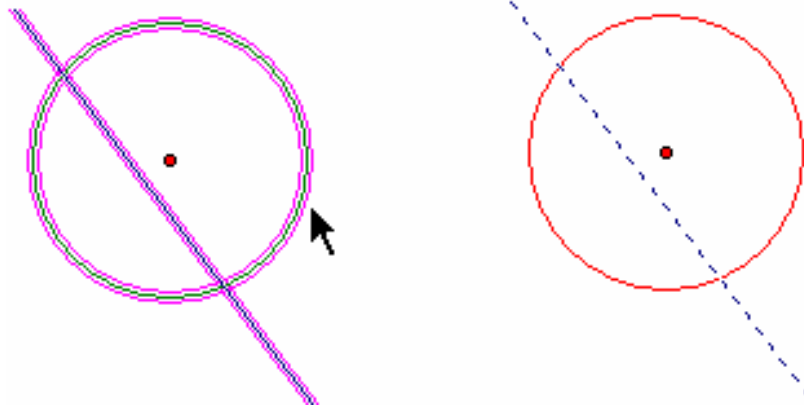
5. Tô màu và đổi nét vẽ.

- Dùng Menu Display: mở Menu Color để chọn màu và Menu Line width để chọn nét vẽ của đường.

Thao tác: - Chọn đường cần tô màu (hoặc cần thay đổi kiểu đường)
- Lệnh Display/Color để chọn màu trong bảng màu.

Hoặc: Lệnh Display/Line width để đổi nét đứt, nét mảnh hoặc nét đậm.

Chú ý. Ta cũng có thể nhấn nút trái chuột để hiển thị bảng màu hay nét vẽ.



6. Vẽ đường tròn, cung tròn.

a. Vẽ đường tròn:

- Có hai cách:

+ Sử dụng công cụ Compass Tool trên hộp Toolbox.

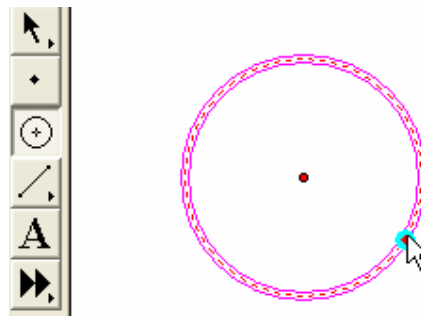
+ Sử dụng menu Construct:

Lệnh Construct/Circle By Center+Point

Hoặc Lệnh Construct/Circle By Center+Radius.

- Thao tác:

+ Sử dụng hộp công cụ: kích nút trái chuột chọn công cụ Compass Tool trong Tools Box, sau đó đưa vào vùng cần vẽ đường tròn, rồi nhấn giữ nút trái và di chuột để vẽ đường tròn, cuối cùng nhả nút chuột thì ta được một đường tròn trên màn hình.

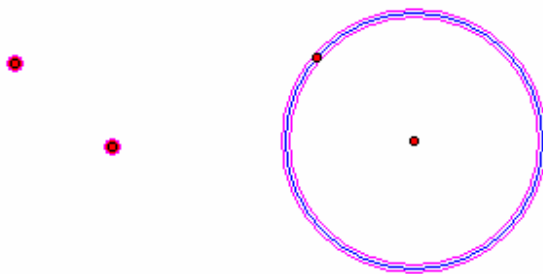


+ Sử dụng lệnh Construct/Circle By Center+Point

Thao tác:

- Trước hết chọn một điểm để xác định tâm đường tròn, chọn điểm thứ hai nằm trên đường tròn (bán kính = khoảng cách của hai điểm đó).

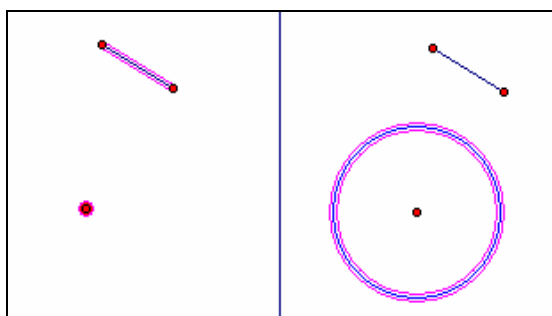
- **Thực hiện lệnh Construct/Circle By Center+Point (Vào Menu Construct và chọn Circle By Center+Point).**



+ Sử dụng lệnh Construct/Circle By Center+Radius

Thao tác:

- Chọn một điểm để xác định tâm đường tròn,
- Chọn một đoạn thẳng để xác định bán kính,
- Thực hiện lệnh Construct/Circle By Center+Radius (vào Menu Construct và chọn Circle By Center+Radius).



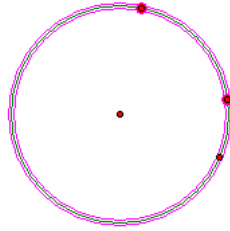
b. Vẽ cung tròn

Vẽ một cung trên một đường tròn cho trước như sau:

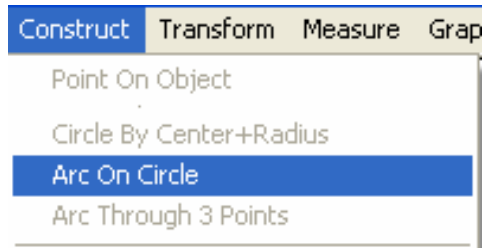
Cách 1. Sử dụng Construct/Arc On

Bước 1: Chọn 2 điểm đầu mút của cung trên đường tròn và chọn đường tròn đã có trên màn hình.

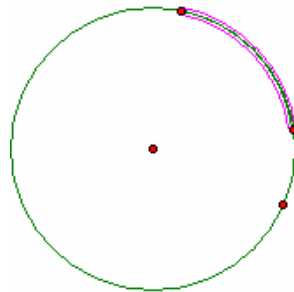
Chú ý: Thứ tự của hai đầu mút của cung phải lấy ngược chiều kim đồng hồ.



Bước 2. Thực hiện lệnh: Construct/Arc On Circle



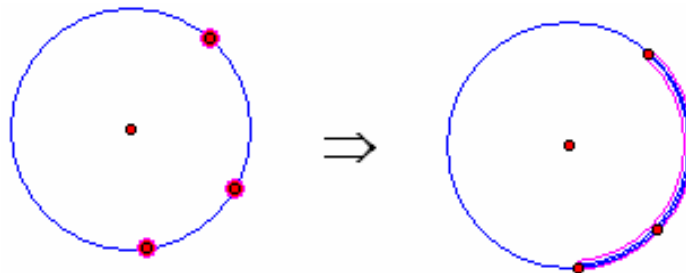
Trên màn hình hiện cung của đường tròn như hình sau:



Cách 2. Sử dụng lệnh Construct/Arc through 3 point.

Bước 1. Chọn 3 điểm của cung tròn theo thứ tự ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn.

Bước 2. Thực hiện lệnh Construct/Arc through 3 point.

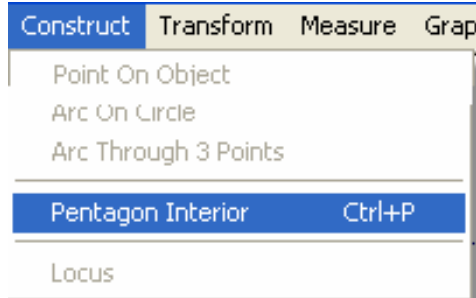


7. Miền đa giác, hình tròn, hình quạt, hình viên phân.

Đa giác.

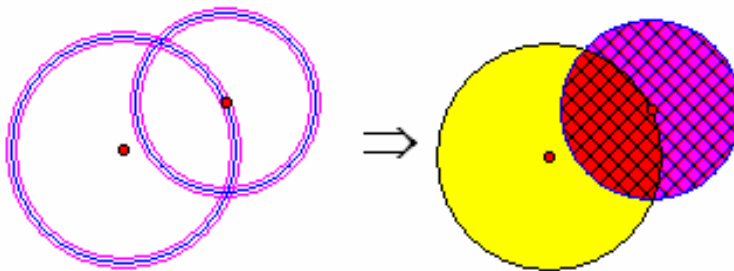
- Sử dụng menu Construct

- Thao tác:
 - o Chọn các đỉnh theo thứ tự liên tiếp của đa giác.
 - o Thực hiện lệnh Construct/Pentagon Interior (vào Menu Construct và chọn Pentagon Interior).



+ Hình tròn.

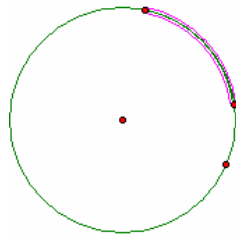
- Đánh dấu chọn đường tròn
- Thực hiện lệnh Construct/ Circle Interior (Vào menu Construct và chọn Circle Interior).



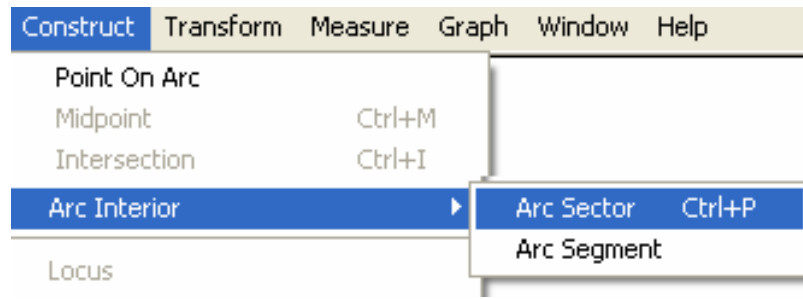
+Hình quạt

- Lệnh: Construct/Arc Interior/Arc Sector
- Thao tác: 2 bước

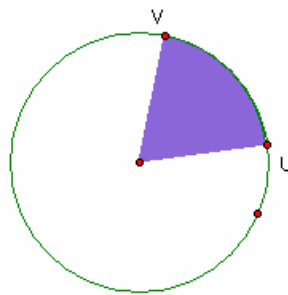
Bước 1: Chọn cung của hình quạt



Bước 2: Thực hiện lệnh Construct/Arc Interior/Arc Sector



Ta có hình quạt sau

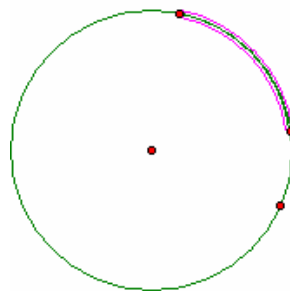


Hình viên phân.

Thực hiện như vẽ hình quạt:

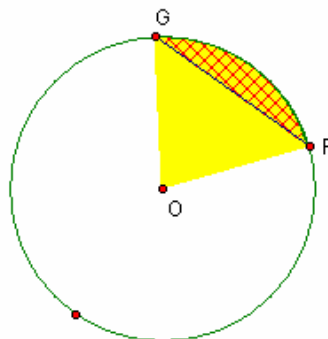
- Thao tác: 2 bước

Bước 1: Chọn cung



Bước 2: Thực hiện lệnh: Construct/Arc Interior/Arc Segment

Ta được hình sau:



Chú ý. Dùng bảng màu để tô màu.

8. Vẽ đường thẳng song song, đường thẳng vuông góc.

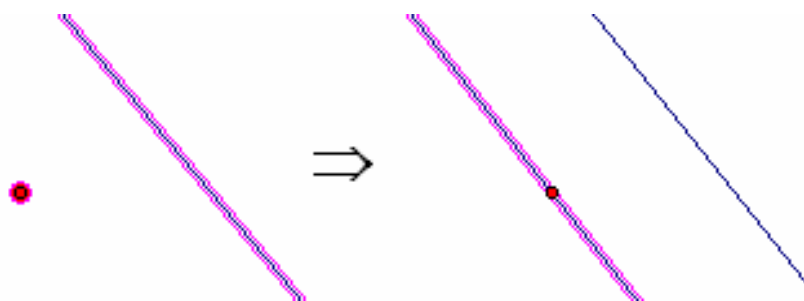
- Dùng Menu Construct: Lệnh Construct/Parallel Line để vẽ đường thẳng đi qua một điểm và song song với một phương đã cho
- Lệnh Construct/Perpendicular Line để vẽ đường thẳng đi qua một điểm và vuông góc với một phương đã cho.
- Thao tác:

Bước 1. Chọn đường thẳng/ Tia/Đoạn thẳng và một điểm

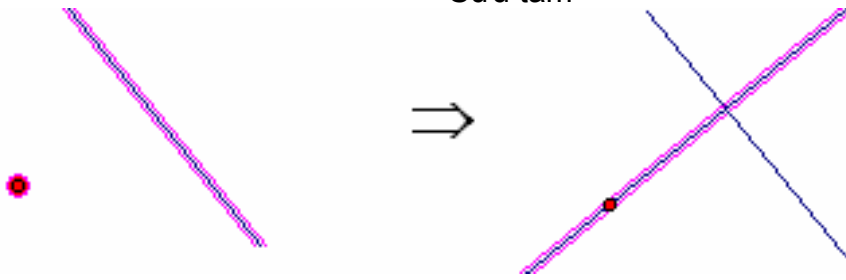
Bước 2. Thực hiện lệnh:

Construct/Parallel line để vẽ đường thẳng song song với đường thẳng và qua điểm đã chọn.

Construct/Perpendicular Line để vẽ đường vuông góc với đường thẳng và qua điểm đã chọn.



Dựng đường thẳng song song



Dựng đường thẳng vuông góc.

Phần II. Sketchpad với bài toán quỹ tích

1. Cách dựng quỹ tích trên Sketchpad.


Bài toán “Tìm quỹ tích” được giải thuận lợi hơn khi dự đoán được quỹ tích có dạng hình gì. Trong bài toán Quỹ tích thường đòi hỏi “Tìm quỹ tích của điểm M khi một điểm N nào đó di động trên một đối tượng (là đường hay miền) đã cho trên mặt phẳng. Như vậy, ta cần thiết xác định mối quan hệ giữa điểm M và điểm N, từ đó cho N di động, ta tìm hiểu xem điểm M di động như thế nào.

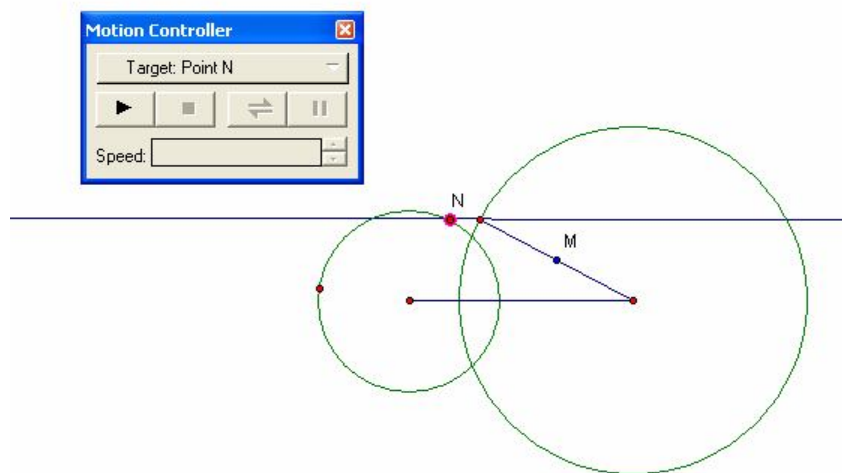
Sketchpad có những chức năng giúp ta nhìn thấy một cách sinh động sự di chuyển của điểm N và điểm M trên màn hình:

- + Bảng điều khiển Motion Controller trong Menu Display.
- + Tạo nút hoạt hình Animation Button trong Menu Edit.
- + Có định dạng quỹ tích: Locus trong menu Construct.

a). Bảng điều khiển Motion Controller.

Thao tác:

- Chọn đối tượng nhờ công cụ , chẳng hạn chọn một điểm N tùy ý trên một đường tròn (O).
- vào Menu Display chọn Show Motion Controller thì Bảng điều khiển di động hiện ra. Khi ta kích nút play trên bảng điều khiển thì N di động trên đường tròn (O).



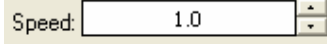
Nút Play




Nút Stop  (Dừng),

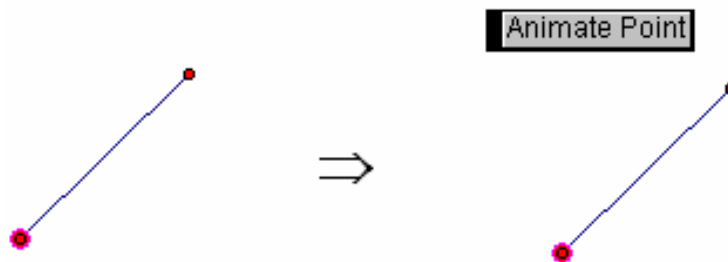
Nút  (Đổi chiều chuyển động)

Nút  (tạm dừng)

Nút  (Thay đổi tốc độ chuyển động)

b) Sử dụng tạo hoạt hình Animation Button trong menu Edit:

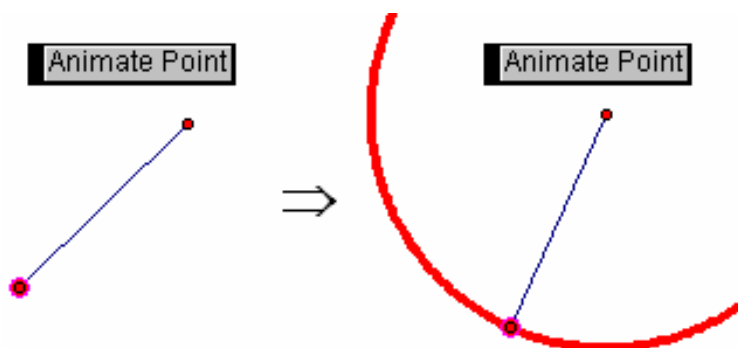
- Chọn đối tượng cần tạo hoạt hình (chẳng hạn điểm chuyển động trên một đường)
- Vào Menu Edit/Action Button/Animation, trên màn hình xuất hiện nút 
- Kích nút này cho đối tượng chuyển động và kích lần nữa nếu muốn dừng lại.



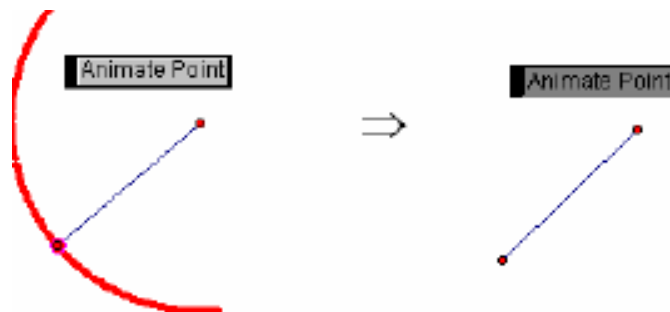
+ Sử dụng Trace tạo vết cho điểm (hay đường) để hiển thị quỹ đạo chuyển động của đối tượng:

- Chọn đối tượng
- Vào menu Display rồi chọn Trace.
- Chọn màu của đối tượng bằng bảng màu Color

Khi đối tượng chuyển động sẽ để lại vết vạch thành quỹ đạo màu đã chọn.

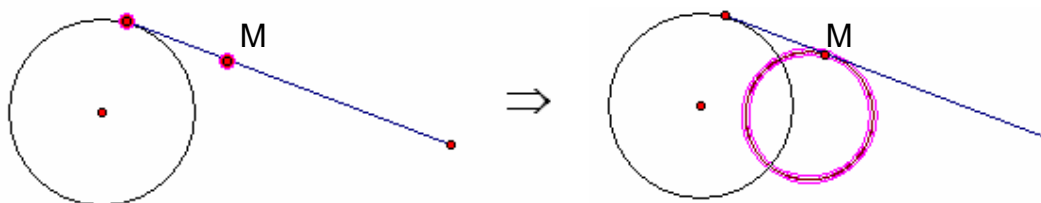


+ Sử dụng Erase Traces để xóa vết: vào menu Display chọn Erase Traces hoặc kích nút phải chuột nên màn hình rồi chọn Erase Traces.



c) Sử dụng Locus để vẽ quỹ tích của một đối tượng:

Ví dụ. Tìm quỹ tích của điểm M khi điểm N di động trên đường C. Khi đó ta cần chọn cả hai điểm N và M và thực hiện lệnh Construct/Locus. Điểm M sẽ vạch quỹ tích cần tìm:



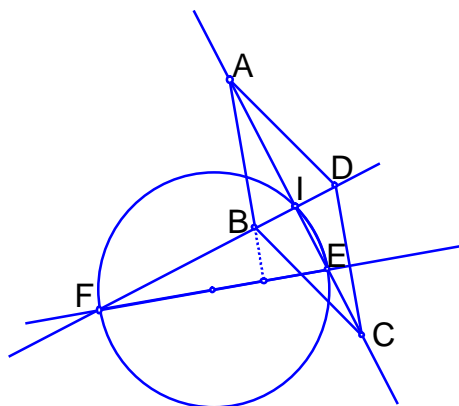
Ví dụ . Cho hình thoi ABCD, cạnh có độ dài a, có hai đường chéo AC và BD đi qua hai điểm cố định E và F, cạnh bên AB vuông góc với EF. Tìm quỹ tích của:

a. Tâm của hình thoi.

b. Trung điểm các cạnh của hình thoi.

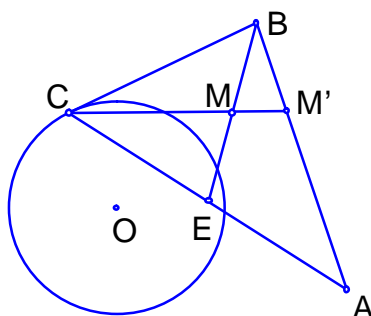
c. Các đỉnh của hình thoi.

Khi tâm I của hình thoi di chuyển thì trung điểm các cạnh của hình thoi và các đỉnh của hình thoi cũng di chuyển, chúng vạch nên các đường tròn bằng nhau. Dựa vào các đường tròn này hiển thị trên màn hình mà ta thấy rằng có thể xác lập mối quan hệ giữa đỉnh, trung điểm các cạnh của hình thoi với tâm của hình thoi, từ đó chọn được phép tịnh tiến để tìm quỹ tích trung điểm các cạnh và quỹ tích các đỉnh của hình thoi.



Hình 96

Ví dụ. Cho đường tròn (O,R) cố định, hai điểm A và B cố định ở bên ngoài đường tròn, điểm C di động trên đường tròn, E là trung điểm của AC . Tìm quỹ tích trung điểm M của BE .

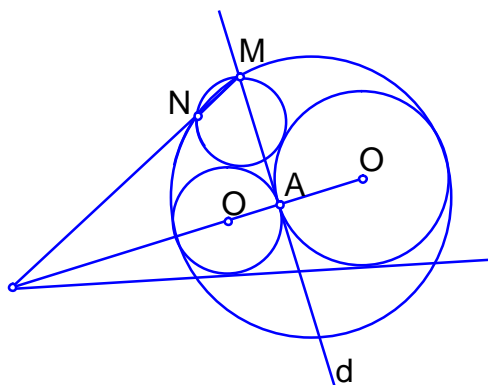


Hình 97

Ta thấy khi C di động trên (O) thì E và M cũng di động theo. Quan sát sự di động của ba điểm C, E, M , ta thấy CE luôn đi qua điểm A cố định và ME luôn đi qua điểm B cố định. Do tính chất E và M là các trung điểm AC và BE nên:

E là ảnh của C qua phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{1}{2}$. M là ảnh của E qua phép vị tự tâm B, tỉ số $\frac{1}{2}$. Do đó M là ảnh của C qua tích hai phép vị tự đó: Đó là phép vị tự tỉ số $\frac{1}{4}$ mà tâm vị tự thuộc AB.

Ví dụ. Cho hai đường tròn (O,R) và (O',R') tiếp xúc ngoài với nhau ở A. Một điểm M nằm trên trục đẳng phương d của hai đường tròn. Dụng các đường tròn qua M và tiếp xúc với các đường tròn (O) và (O') . Tìm quỹ tích giao điểm của hai đường tròn dụng được (khác điểm M) khi M chạy trên d.



Hình 98

Trên màn hình, cho M chuyển động trên d thì giao điểm N của hai đường tròn tiếp xúc với (O) và (O') cũng di động theo. Quan sát ta thấy khi M trùng với giao điểm của d và tiếp tuyến chung ngoài của (O) và (O') thì một trong hai đường tròn vừa dựng đã biến mất (không tồn tại), nên khi đó điểm N phải tìm quỹ tích cũng không tồn tại. Như thế, phần mềm hiển thị cho ta thấy một cách trực quan giới hạn của quỹ tích.

=====

Phần 3 . Sử dụng skechpad vào đo đạc

1. Đo độ dài đoạn thẳng

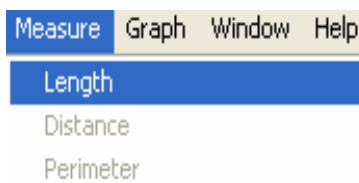
- Lệnh: Measure/length

- Thao tác : 2 bước

Bước 1: Chọn đường thẳng muốn đo độ dài



Bước 2: Vào Menu Measure, chọn Length (Measure/length)



2. Đo độ khoảng cách giữa 2 điểm bất kì

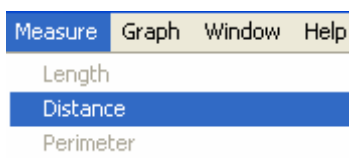
- Lệnh: Measure/Distance

- Thao tác: 2 bước

Bước 1: Chọn 2 điểm muốn đo khoảng cách



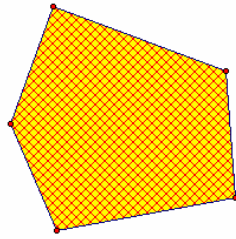
Bước 2: Vào Menu Measure, chọn Distance (Measure/Distance)



3. Đo chu vi một đa giác

- Lệnh: Measure/Perimeter

- Thao tác: Bước 1 Chọn miền của đa giác cần đo



Miền ngũ giác (Pentagon)

Bước 2: Thực hiện lệnh: Measure/Perimeter

(Vào Menu Measure rồi chọn Perimeter)

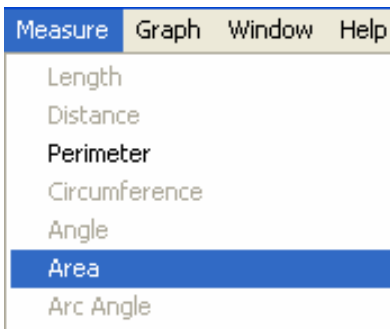
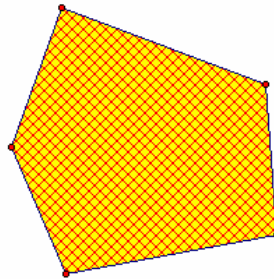
4. Đo diện tích một đa giác.

- Lệnh: Measure/Area

- Thao tác: 3 bước

Bước 1: Chọn miền đa giác

Bước 2: Dùng lệnh Measure/Area (vào Menu Measure, chọn Perimeter)



5. Đo góc

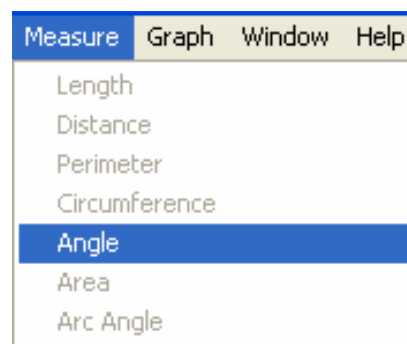
- Lệnh: Measure/Area

- Thao tác: 2 bước

Bước 1: Đánh dấu 3 điểm xác định góc theo thứ tự (Điểm thứ 2 chính là đỉnh góc)

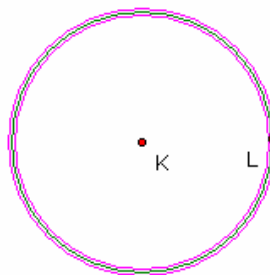


Bước 2: Nhấp chuột thực hiện lệnh Measure/Angle

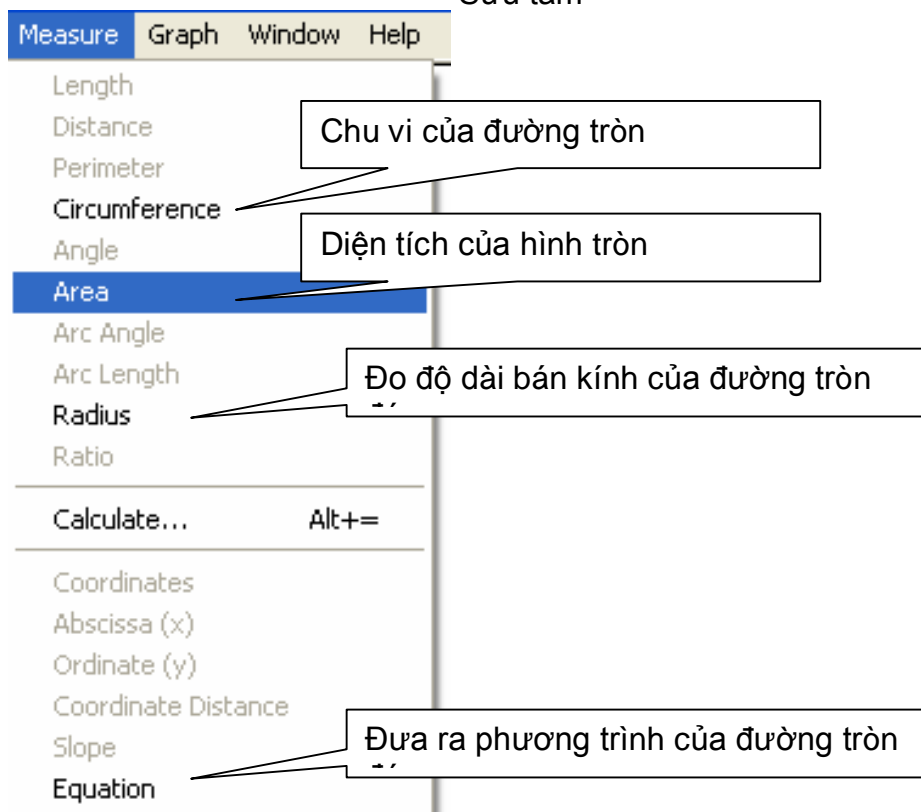


6. Đo đạc đường tròn: chu vi, diện tích và bán kính.

Bước 1: Chọn đường tròn (Kích chuột vào đường biên của đường tròn)



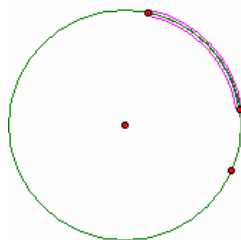
Bước 2: Các thao tác thực hiện đo bằng các lệnh Measure/Circumference, Measure/Area hoặc Measure/Radius.



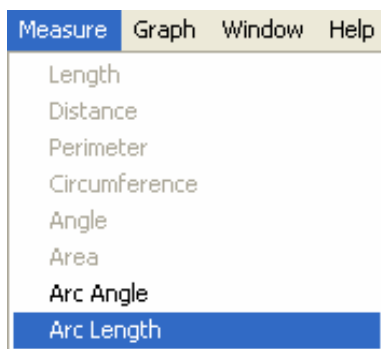
7. Đo chiều dài cung, dây cung, diện tích hình quạt

a) Đo chiều dài cung

Bước 1: Chọn cung muốn đo độ dài



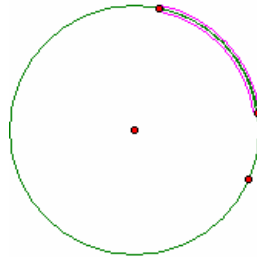
Bước 2: Lệnh: Measure/ Arc length



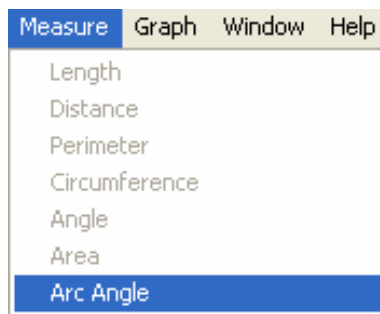
b) Đo góc tương ứng với cung

- Lệnh: Measure/Arc angle
- Thao tác: 2 bước

Bước 1: Chọn cung muốn đo góc



Bước 2: Nhấp chuột theo thứ tự lệnh: Measure/Arc Angle

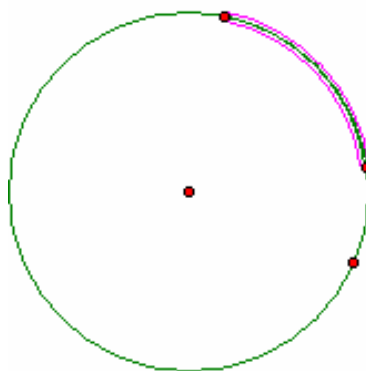


d) Đo diện tích hình quạt, chu vi hình quạt

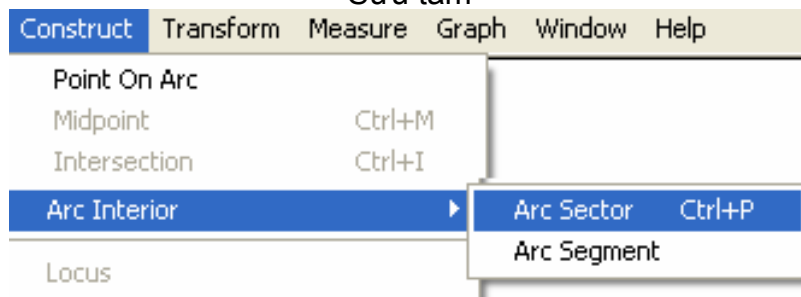
Vẽ hình quạt

- Lệnh: Construct/Arc Interior/Arc Sector
- Thao tác: 2 bước

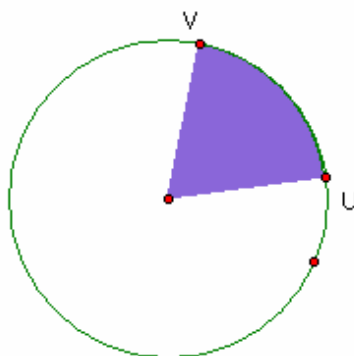
Bước 1: Chọn cung của hình quạt



Bước 2: Nhấp chuột theo thứ tự lệnh Construct/Arc Interior/Arc Sector



Ta có hình quạt sau

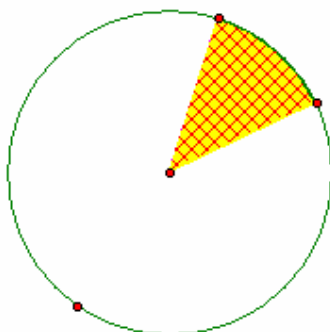


Đo diện tích hình quạt: - Lệnh Measure/ Area

Đo chu vi hình quạt : - Lệnh Measure/Perimeter

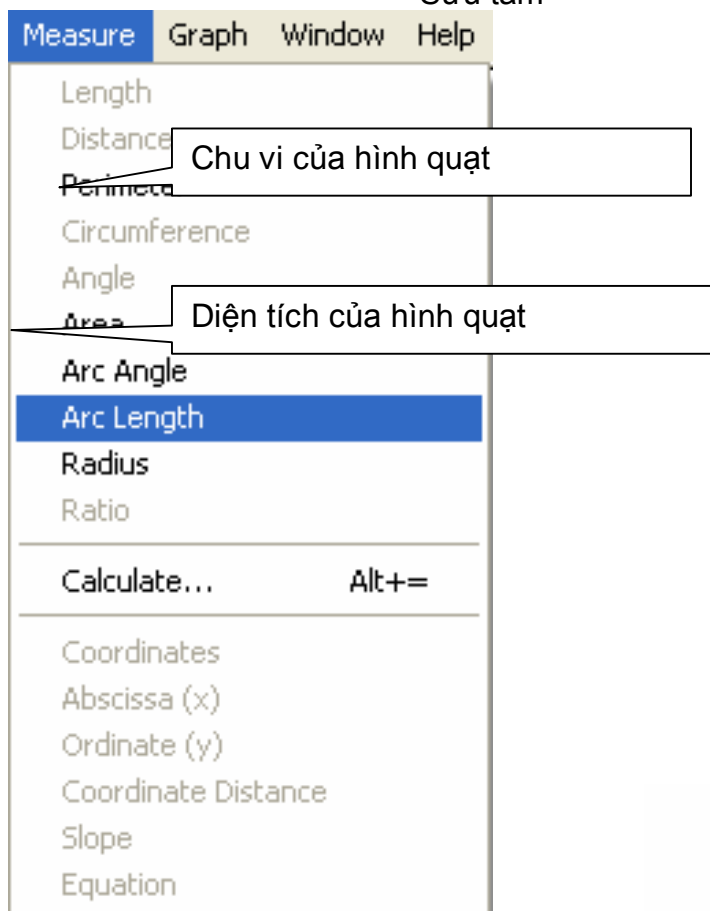
- Thao tác: 2 bước

Bước 1: Chọn hình quạt (Kích chuột vào miền trong của hình quạt)



Bước 2: Nhấp chuột theo thứ tự lệnh Measure/Area (để tính diện tích hình quạt)

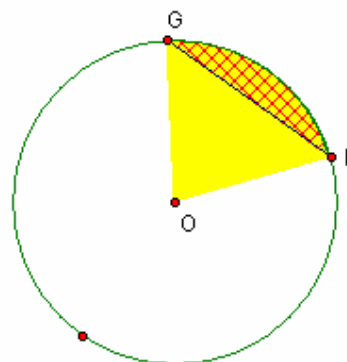
hoặc lệnh Measure/Perimeter (để tính chu vi hình quạt)



Vẽ hình viên phân.

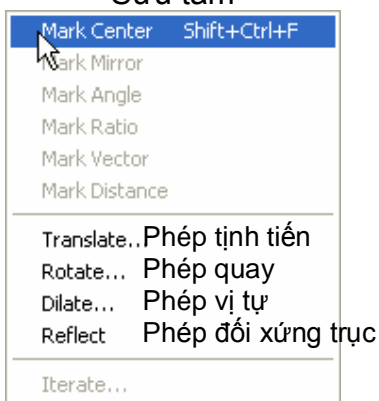
Thực hiện như vẽ hình quạt, nhưng với lệnh

Construct/Arc Interior/Arc Segment



Phần 4. Các phép biến hình

Sketchpad thực hiện được các phép biến hình sau trên mặt phẳng:

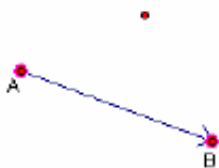


1. Phép tịnh tiến.

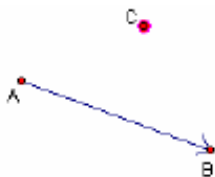
- Sử dụng Translate trong menu Transform.
- Thao tác. Có hai cách như sau:

Cách 1: Vectơ tịnh tiến xác định bởi hai điểm (điểm đầu và điểm cuối).

Bước 1- Chọn vectơ tịnh tiến: chọn 2 điểm trên mặt phẳng A, B.
Sau đó chọn Transform/Mark Vector (vectơ AB được đánh dấu).



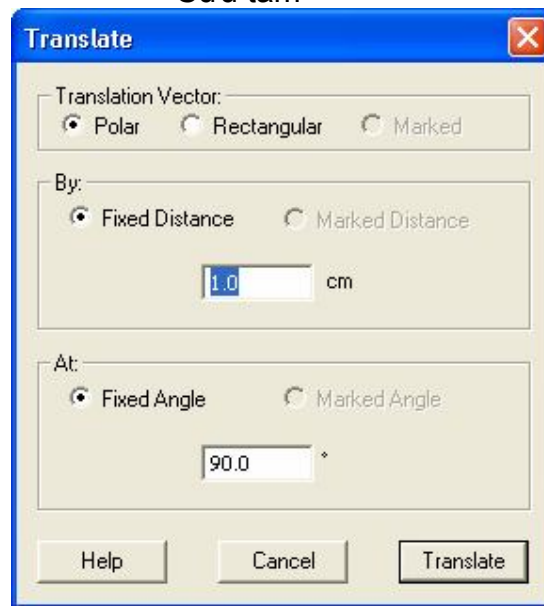
Bước 2- Chọn điểm C cần lấy ảnh qua phép tịnh tiến theo AB.



Bước 3- Lệnh Transform/Translate



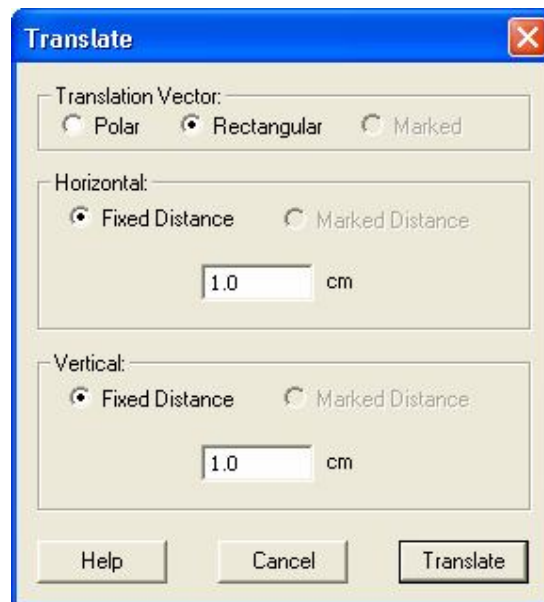
Cách 2. Chọn vectơ tịnh tiến có hoành độ xác định và tạo với Ox (phương nằm ngang, hướng từ trái sang phải) một góc xác định.



hoặc

Vectơ tịnh tiến là một vectơ có hoành độ và tung độ xác định (trong hệ tọa độ Đê-cac vuông góc thuận, với Ox nằm ngang hướng từ trái sang phải và Oy thẳng đứng hướng từ dưới lên trên).

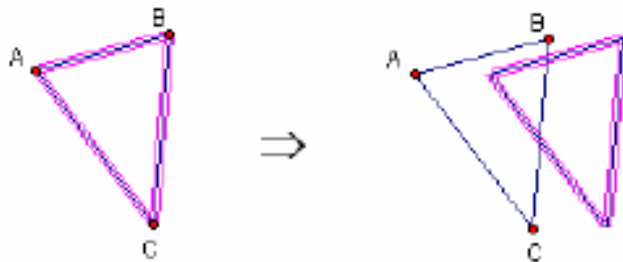
Thao tác: Điền các tham số cần thiết theo một trong hai lựa chọn Polar hoặc Rectanglar.



Sau khi chọn vectơ tịnh tiến, ta thực hiện như ở trên.

Bước 1- Chọn hình cần tịnh tiến.

Phạm Khắc Xứng_ GV toán THPT số 1 Bảo Yên
Sưu tầm
Bước 2- Chọn lệnh Transform/Translate.



2. Phép vị tự.

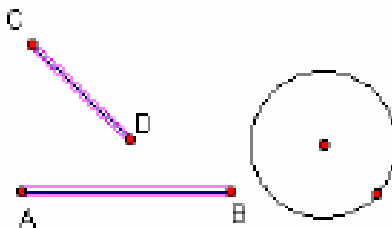
Dựng ảnh của một đối tượng qua phép vị tự theo tỉ số cho trước.

- Sử dụng lệnh Dilate trong menu Transform.
- Thao tác: có ba cách như sau:

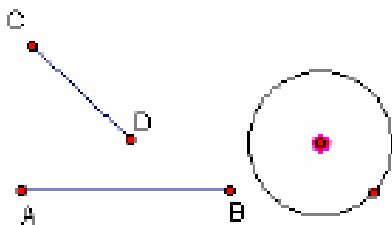
Cách 1: Phép vị tự có tỉ số bằng tỉ số hai đoạn thẳng cho trước $k = \frac{AB}{CD}$

Bước 1- Chọn hệ số vị tự k : đánh dấu chọn hai đoạn thẳng AB và CD theo thứ tự AB rồi CD.

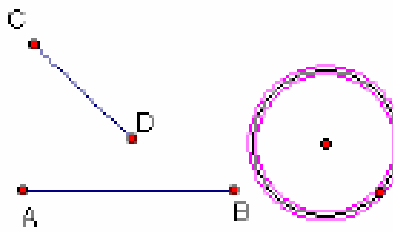
Lệnh Transform/Mark Segment Ratio được $k = \frac{AB}{CD}$



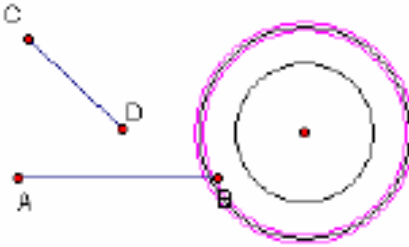
Bước 2- Chọn tâm vị tự: lệnh Transform/Mark center.



Bước 3- Chọn hình cần lấy ảnh qua phép vị tự.

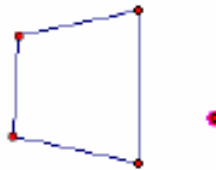


Bước 4- Thực hiện lệnh Transform/Dilate/Dilate.

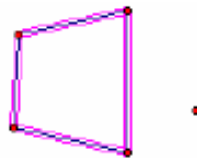


Cách 2: Tỷ số vị tự do nhập vào bảng Dilate sau

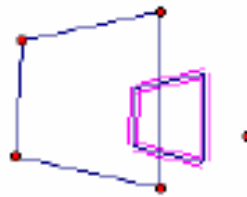
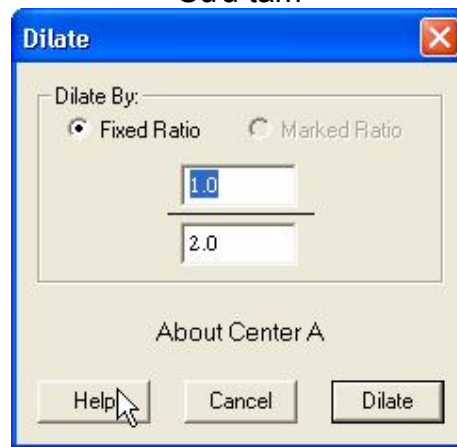
Bước 1- Chọn tâm vị tự.



Bước 2- Chọn đối tượng cần lấy ảnh qua phép vị tự.

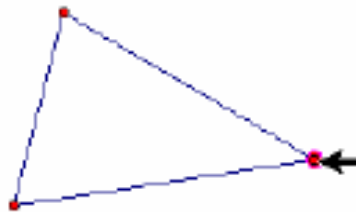


Bước 3- Chọn menu Transform, chọn Dilate, khi xuất hiện hộp thoại thì nhập hệ số vị tự vào hai ô của hộp thoại sau đó chọn Dilate.



Cách 3: Phép vị tự với hệ số thay đổi.

Bước 1- Chọn tâm vị tự.

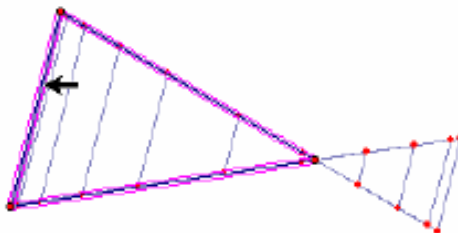


Bước 2- Chọn chức năng vị tự với hệ số thay đổi: di chuột vào

mũi tên chọn ở hộp công cụ,  chọn chức năng vị tự có

biểu tượng là 

Bước 3- Đánh dấu hình cần vị tự. Đặt chuột và rê hình cần biến đổi.



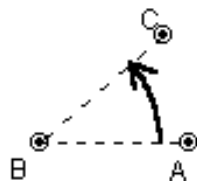
3. Phép quay

- Sử dụng Rotate trong menu Transform.
- Thao tác. Có ba cách sau:

Cách 1: Phép quay có góc quay bằng một góc cho trước ABC.

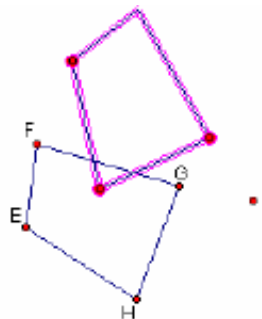
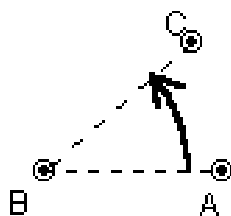
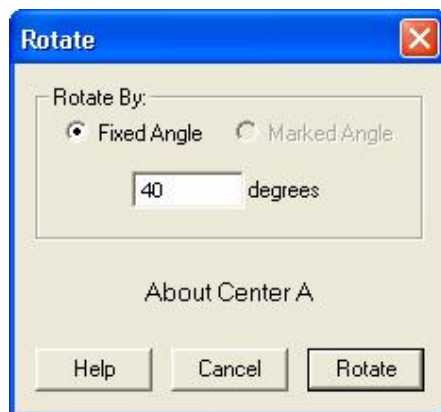
Bước 1- Chọn 3 điểm lần lượt: trên cạnh thứ nhất, đỉnh góc và trên cạnh thứ hai của góc. Sau đó thực hiện lệnh xác định góc quay:

Transform/Mark Angle



Bước 2- Chọn tâm quay (giống như chọn tâm vị tự).

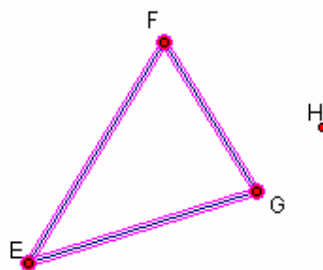
Bước 3- Chọn hình cần lấy ảnh qua phép quay, sau đó vào menu Transform, chọn mục Rotate, xuất hiện hộp thoại ta tiếp tục chọn Rotate trong hộp thoại.



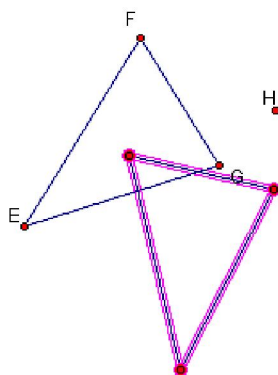
Cách 2: Phép quay số đo góc quay cho trước.

Bước 1- Chọn tâm quay.

Bước 2- Chọn hình cần dựng ảnh qua phép quay.



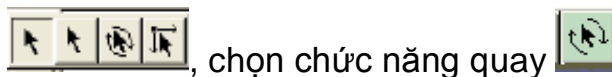
Bước 3- Dựng ảnh của hình chọn: chọn menu Transform, chọn mục Rotate, xuất hiện hộp thoại, nhập giá trị góc quay vào hộp và kích chuột vào nút Rotate.



Cách 3: Phép quay với số đo góc quay thay đổi (điều khiển bằng di chuột).

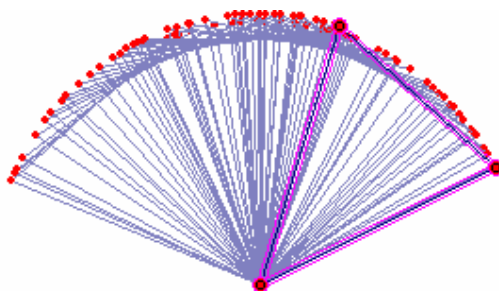
Bước 1- Chọn tâm quay.

Bước 2- Kích nút chuột vào công cụ mũi tên trên hộp Toolbox



Bước 3- Chọn hình cần dựng ảnh qua phép quay.

Bước 4- Đưa con trỏ vào hình đã chọn, kích nút trái rê chuột, ta được ảnh của hình đã cho (để lưu lại ảnh ta chọn Trace).



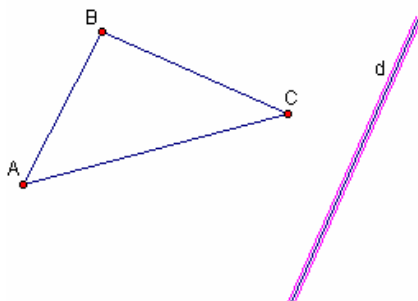
4. Phép đối xứng trục

- Sử dụng Reflect trong menu Transform.

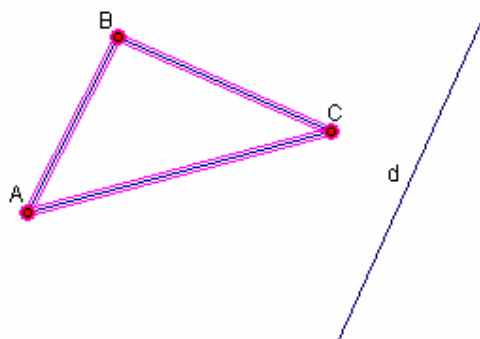
- Thao tác:

+ Bước 1. Chọn trục đối xứng là đường thẳng d đã cho:

Thực hiện lệnh Transform/Mark mirror để xác định trục d là trục đối xứng.

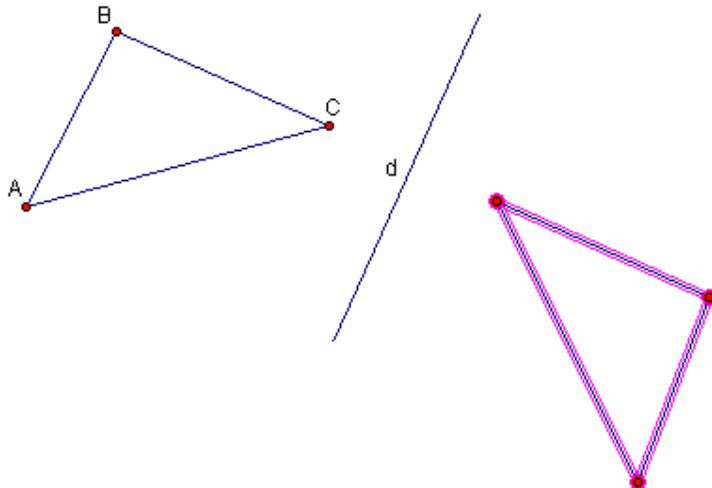


+ Bước 2: Chọn hình cần dựng ảnh qua phép đối xứng.



+ Bước 3. Hiện thị ảnh của hình qua phép đối xứng:

Lệnh Transform/Reflect



Phần 5. Vẽ đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số trong hệ tọa độ Đề các và hệ tọa độ cực

1. Sử dụng Graph Menu.

-Chọn Hệ tọa độ Đề-cac hay tọa độ cực bằng lệnh:

Graph/Grid Form/Square Grid (Hệ tọa độ Đề các)

Graph/Grid Form/Polar Grid (Hệ tọa độ cực)

- **Viết biểu thức của hàm số bằng lệnh:**

New Function: Graph/New Function

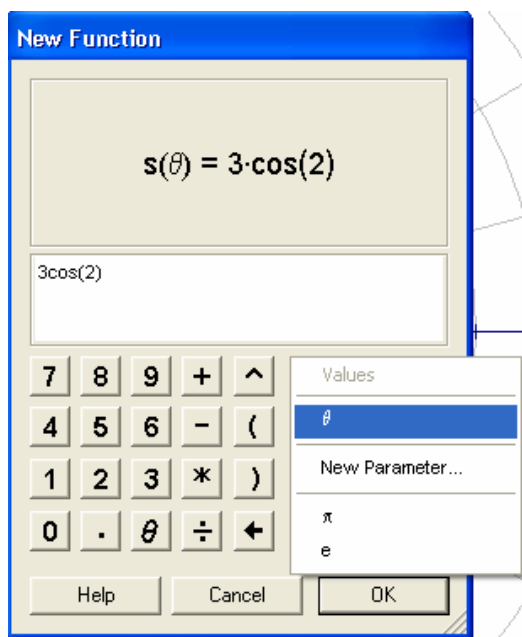
Gõ biểu thức của Hàm số nhờ sử dụng bảng tính, chọn giá trị trong Values, viết hàm số sơ cấp từ mục Functions.

- **Vẽ đồ thị:**

Đánh dấu chọn hàm số đã viết trên màn hình

Vẽ đồ thị bằng lệnh: Graph/Plot Function

Đồ thị của hàm số sẽ nhanh chóng hiện ngay lên trên màn hình.

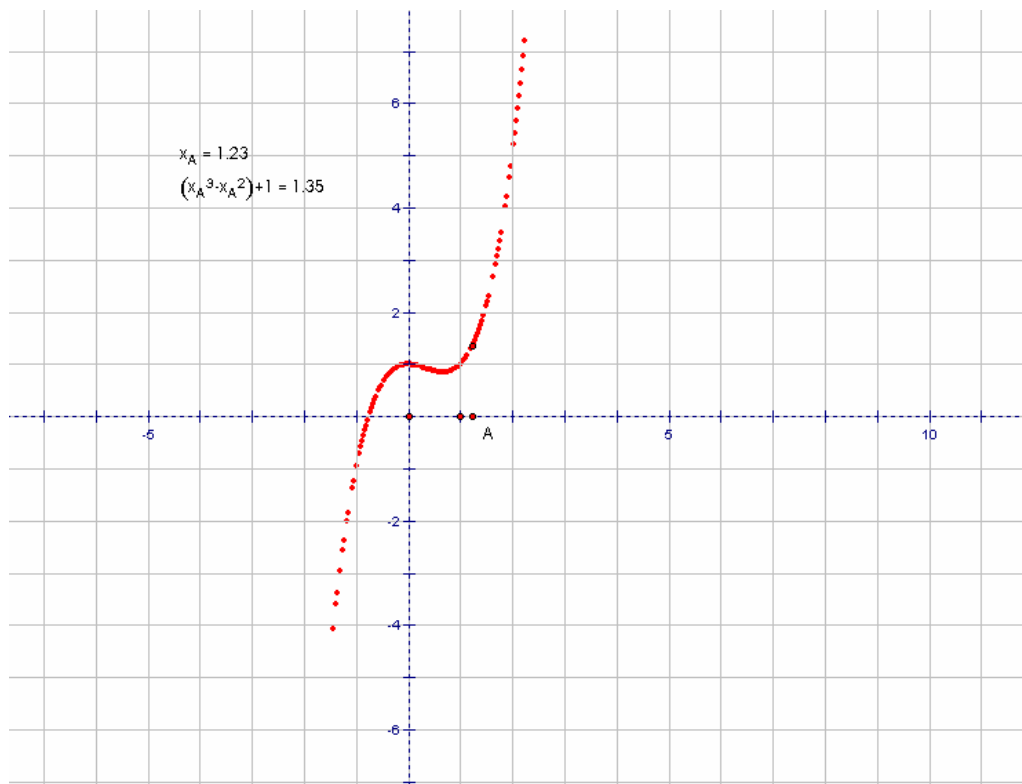


2. Vẽ từng điểm của đồ thị hàm số.

Ta có thể vẽ được đồ thị của các hàm số bằng Animation hoặc Locus như sau.

-Chọn một điểm tùy ý A trên một trục tọa độ (chẳng hạn trên Ox),

-Lấy hoành độ x của A: Đánh dấu điểm A, dùng lệnh Measure/Abcissa.



-Viết biểu thức của hàm số $f(x)=x^3-x^2+1$ nhờ bảng tính Calculate trong mục Measure với x lấy bằng x_A như trong hình trên. Chú ý rằng x_A và $x_A^3-x_A^2+1$ có giá trị phụ thuộc vị trí của điểm A trên Ox.

-Vẽ điểm M có tọa độ $(x, f(x))$ bằng đánh dấu chọn theo thứ tự $x_A = 1.23$ và $(x_A^3 - x_A^2) + 1 = 1.35$ rồi dùng lệnh: Graph/Plot As.

-Tạo vết cho điểm M và đánh dấu điểm A, dùng lệnh Animate để vẽ đồ thị của $f(x)$ do vết của M tạo nên.

-Hoặc dùng lệnh Construct/Locus để dựng quỹ tích của điểm M, đó là đồ thị của hàm số $f(x)=x^3-x^2+1$.

- Chú ý. Đối với hệ tọa độ cực: Lưới tọa độ trong hệ tọa độ Đề các là hai họ đường thẳng vuông góc với nhau, còn trong hệ tọa độ cực: một là họ những đường tròn đồng tâm O và họ kia là những đường thẳng đồng quy tại O. Vì vậy, điểm A lấy tùy ý trên một đường tròn mà đó tâm O. Góc $(= (Ox, OA))$ lấy làm biến độc lập. Biểu thức của hàm số trong hệ tọa độ cực có

dạng $r=f(\theta)$, với $r=OA$. Do đó điểm M thuộc hàm số có tọa độ trong hệ tọa độ cực là: $(r, f(\theta))$.

- Ví dụ. Phương trình của đường hoa hồng có dạng $r=acos(b\theta)$.

Chủ đề 3

Giảng dạy môn giải tích với sự hỗ trợ của phần mềm Mathcad

1. Một số ưu điểm của phần mềm Mathcad

1.1. Một số ưu điểm.

(Là phần mềm toán học được sinh viên, cán bộ giảng dạy, nghiên cứu toán,... sử dụng rộng rãi.

(Mathcad bao quát một lớp khá rộng các lĩnh vực của toán học: Giải tích, Đại số, Số học, Xác suất...

(Dùng để lập trình giải các bài toán phức tạp, tính toán không những bằng số mà còn trên các tham số (Symbolics). Lệnh của Mathcad để nhớ và vận dụng những lệnh cơ bản nằm trong các menu.

(Mathcad được thiết kế theo phương pháp hướng đối tượng: mỗi công thức, một đoạn văn bản, ... hiển thị là một vùng trên trang làm việc, có thể di chuyển bất kỳ vị trí nào trên trang làm việc, có thể thể định dạng về phông chữ, màu sắc, phóng to, thu nhỏ khi cần thiết.

Kết luận: Với những ưu điểm trên đây chúng ta có thể vừa soạn thảo văn bản, vừa làm việc khác nhau của toán học: tính toán, vẽ đồ thị, giải các dạng toán khác nhau có Đại số, số học vừa giải thích,... các công việc đó không khác văn bản bao nhiêu về hình thức tạo nên hứng thú học tập với Đại số, Số học,...

1.2. Một số minh họa

1.2.1. Tính xấp xỉ giá trị của biểu thức số

$$\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx = 0.429 \quad \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{16}\right)} = 0.578$$

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{i^2}{i!} = 5.437 \quad + \quad \begin{vmatrix} 1.12 & 2 & 3 \\ 0.21 & 3 & 5 \\ 0.11 & 0 & 1.3 \end{vmatrix} = 3.932$$

1.2.2. Tính đúng giá trị của biểu thức.

$$\sum_{i=1}^{20} \frac{i^2}{i!} \rightarrow \frac{2422459091299663}{445586448384000} \quad + \quad \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx \rightarrow 2 - \frac{1}{2} \cdot \pi$$

1.2.3. Về tìm hoa văn thông qua về mặt countou của một ma trận.

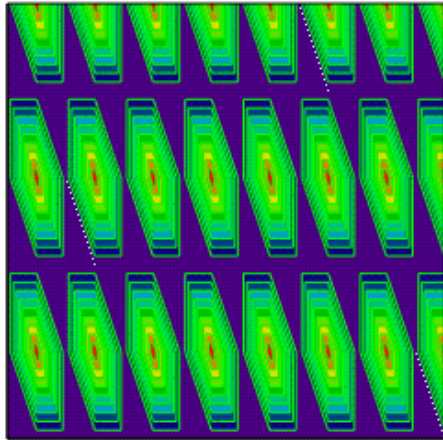
Để thiết kế các hoa văn của gạch lát nhà, trang trí, ... chúng ta có thể lấy mẫu bằng cách vẽ mặt countou của một ma trận. Sau đây là một số ví dụ:

$$m := 0..5 \quad n := 0..5$$

$$Bm, n := \text{mod}(m+n, 3, 2)$$

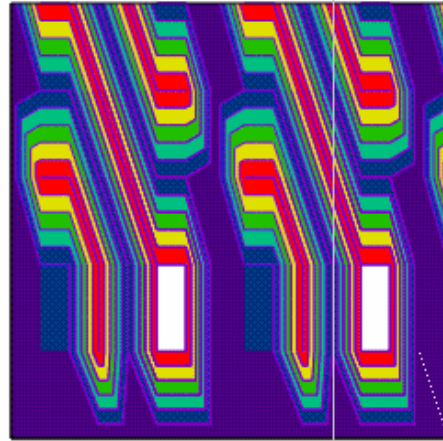
$$m := 0..15 \quad n = 0..9$$

$$A_{m,n} := \text{mod}(m \cdot n, 2)$$



A

$$C_{m,n} := \text{mod}[(m \cdot n)^3, 7]$$

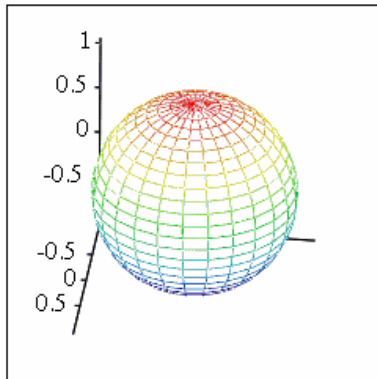


C

1.2.4. Vẽ các mặt cong trong không gian

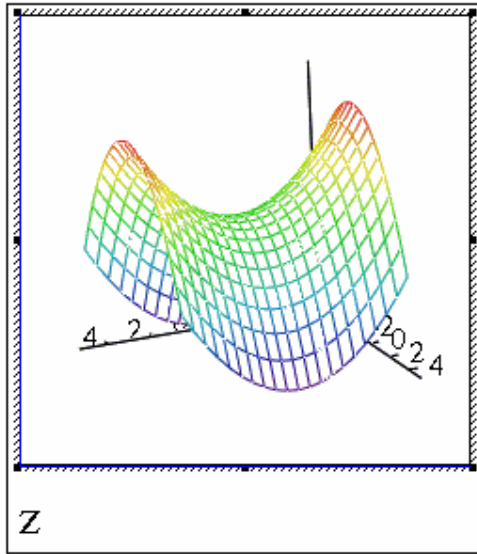
- Mặt cầu đơn vị

$$\begin{aligned} X(\phi, \theta) &:= \sin(\phi) \cdot \cos(\theta) & 0 \leq \phi \leq \pi \\ Y(\phi, \theta) &:= \sin(\phi) \cdot \sin(\theta) & 0 \leq \theta \leq 2 \cdot \pi \\ Z(\phi, \theta) &:= \cos(\phi) \end{aligned}$$



- vẽ mặt yên ngựa:

$$Z(x, y) := \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2}$$



2. Thực hiện các phép tính số học, đại số

2.1. Các lệnh Mathead thực hiện với phép tính số học

(Tính toán với số nguyên (kết quả tính đúng, gần đúng)

(Phân tích thành thừa số nguyên tố.

(Tìm ước chung lớn nhất của hai số nguyên

(Tìm dư của phép chia a cho b (a, b nguyên).

(Tìm tổng hữu hạn vô hạn.

(xem từ trang 85 đến trang 87 tài liệu phát)

giải các bài tập sau::

1. Tính giá trị của các biểu thức sau (với 5 chữ số thập phân).

$$1 - \frac{2}{3 + \frac{3}{4}}$$

$$\sqrt{2 + \sqrt{2\sqrt{2}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{\sqrt{2\sqrt{2}}}}$$

$$\sqrt{\square}$$

Gõ Ctrl + \ để có: $\sqrt{\quad}$

2. Thực hiện:

- Tìm ước chung lớn nhất của 157940 và 78864.
- Tìm bội số chung nhỏ nhất của 18230 và 3224
- Tìm bội chung nhỏ nhất của 22006 và $270 + 230$
 $\text{mod } (22006, 10) (6$
 $\text{mod } (270 + 370, 10) (3$

3. Phân tích $2^{2^5} + 1$ ra thừa số nguyên tố.

4. Tính giá trị của biểu thức:

$$\left| \sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}} \right|$$

2.2. Các lệnh của Mathcad liên quan đến đại số.

- (Phân tích đa thức thành nhân tử
- (Khai triển các biểu thức Đại số
- (Tính giá trị của biểu thức

2.3. Thực hiện các phép tính Giải tích

2.4. Vẽ đồ thị

Xem trong tài liệu từ trang 88 đến 99

Bài tập (giải, tìm hướng giải các bài toán sau bằng Mathcad)

1)Triển khai nhị thức $(x + 2y)^7$

2) Đơn giản biểu thức (đề thi học sinh giỏi miền Bắc 1961-1962).

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

3) Chứng minh hằng đẳng thức sau:

$$\frac{a^2+3ab}{a^2-9b^2} + \frac{2a^2-5ab-3b^2}{6ab-a^2-9b^2} = \frac{a^2+an+ab+bn}{3bn-a^2-an+3ab}$$

4) Rút gọn:

$$\cos 4x + \sin 4x + 2\cos 2x - 2\sin 2x - \cos 2x$$

5) Tối giản biểu thức:

$$\frac{x^8+3x^4+4}{x^4+x^2+2}$$

$$6) \text{ Cho } M = \frac{8x^6-27}{4x^4+6x^2+9} \text{ và } N = \frac{y^4-1}{y^3+y^2+y+1}$$

(Đề thi học sinh giỏi cấp 2 miền Bắc 1970-1971)

a) Rút gọn $\frac{M}{N}$,

b) Tính giá trị của $\frac{M}{N}$ khi $x = 8$; $y = 251$

Hướng dẫn:

$$C1: \text{ Khai báo } A(x,y) = \frac{8x^6-27}{4x^4+6x^2+9} : \frac{y^4-1}{y^3+y^2+y+1}$$

$$A(8, 251) = 1/2.$$

C2: (Sau khi khai báo (1)

$$\boxed{A(x,y)}$$

(Đặt con trỏ ở vị trí:

(Chọn simplify, chọn tiếp substitute.

7. Tìm các giới hạn sau:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{|x-4|}{x-4} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{x} - 1$$

8. Với phần mềm Mathcad chúng ta có thể khai báo một hàm số cho bằng nhiều biểu thức như sau:

Ví dụ. Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{khi } x \leq -3, \\ x^2 + 1 & \text{khi } 3 < x < 5, \\ 2x + 1 & \text{khi } x \geq 5. \end{cases}$$

Khai báo như sau:

$$f(x) := \text{if}(x < 3, 0, \text{if}(x < 5, x^2 + 1, 2x + 1)).$$

a) Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{khi } x \leq 2, \\ 2x - 1 & \text{khi } x > 2. \end{cases}$$

Hãy tìm

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a)

$$f(x) := \frac{\cos^2 x}{\sin(2x)} \quad g(x) := \text{arctg}\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

b)

$$f(x) := \ln(\sqrt{2 \sin(x) + 1} + \sqrt{2 \sin(x) - 1})$$

$$g(x) := e^x \text{arctg}(x) - \ln(\sqrt{1 + e^{2x}})$$

c)

$$\text{Cho hàm số } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0, \\ 0 & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

- Chứng minh rằng f có đạo hàm tại mọi điểm của \mathbb{R} , tìm đạo hàm đó.

- Đạo hàm f' có liên tục tại $x = 0$ hay không.

10. Trên mặt phẳng có thể vẽ nhiều đồ thị trên cùng một hệ toạ độ.

Ví dụ. Vẽ đồ thị của hàm số


$$f(x) = \frac{5 - x^2}{1 - x^2}$$


với các đường tiệm cận đứng $x = 1$, $x = -1$, tiệm cận ngang $y = 3$.

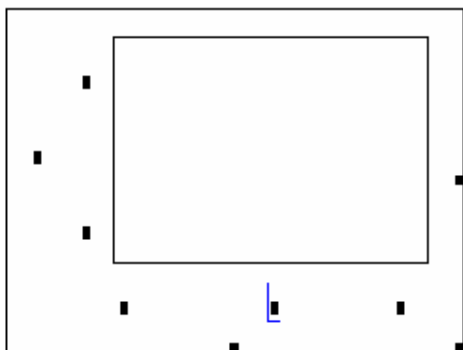
Giải.

- Khai báo hàm số:

$$f(x) := \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

- Chọn biểu tượng vẽ đồ thị trên thanh phím lệnh  ta thấy bảng sau đây hiện ra (menu Graph).

- Di chuyển con trỏ tới vị trí cần vẽ đồ thị và chọn biểu tượng  trên menu Graph ta thấy xuất hiện khung sau:

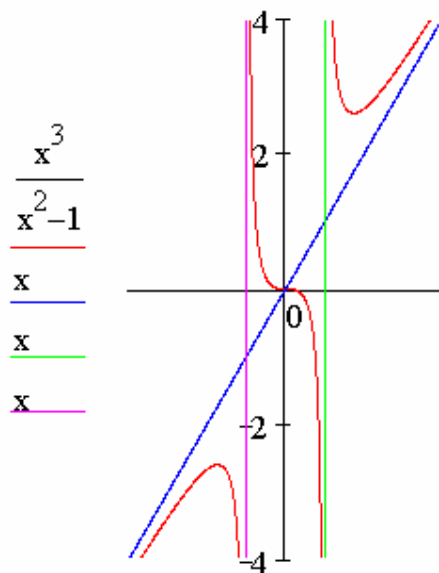


- Nhấp vào ô trống chính giữa bên dưới nhập các đối số: $x, x, -1, 1$.

- Nhấp vào ô trống chính giữa bên trái nhập lần lượt các hàm số:

$$\frac{x^3}{x^2 - 1}, x, x, x$$

- Bấm Tab để di chuyển và khai báo lần lượt khoảng xác định của đối số, miền giá trị của hàm số. Cuối cùng Enter. Ta có đồ thị như sau:



$x, x, 1, -1$

a) Hãy vẽ đồ thị của hàm số $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ và các đường tiệm cận $y = 1$, $y = -1$.

b) Vẽ đồ thị của $y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ và các đường tiệm cận $x = -1$, $y = x - 5$.

11. Có thể sử dụng Mathcad phân tích một phân thức hữu tỉ thành tổng của một đa thức và các phân thức riêng. Thực hiện như sau:

- Nhập phân thức hữu tỉ
- Trong menu Symbolic (View\Toolbars\Symbolic) chọn parfrac, nhập đối số.
- Thực hiện lệnh: Ctrl + > ta sẽ có kết quả.

Ví dụ. Phân tích phân thức hữu tỉ sau thành tổng các phân thức riêng

$$\frac{5x^4 + 3}{x^3 - 2x^2 - 3x} \text{ convert, parfrac, } x \rightarrow 5 \cdot x + 10 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} + \frac{34}{x-3}$$

Hãy phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức riêng:

a)

$$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x + 3)(x - 1)^2}$$

b)

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x + 1)(x^2 + 1)}$$

c) Tính tích phân không xác định của các hàm số trên.

12. Tính các tích phân sau:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx$$

$$\int x \cdot \operatorname{atan}(x)^2 dx$$

$$\int \frac{x \cdot \cos(x)}{\sin(x)^2} dx$$

$$\int \frac{x^2 + 2x + 6}{x^3 - 7x^2 + 14x - 8} dx$$

13. Tính

$$\int_0^{\pi} \frac{x \cdot \sin(x)}{1 + \cos(x)^2} dx$$

$$\int_1^e \frac{\sin(\ln(x))}{x} dx$$

$$\int_2^6 \sqrt{x-2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$$

14. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong sau và minh họa phần mặt phẳng cần tính diện tích

a) $y = x^2$, $y = x^2/2$, $y = 2x$.

b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$ và đường thẳng $x = 12$.

c) Một cung đường cycloid

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

và trục ox , với $a = 2; 3; 4$.

15. Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi $y = x^3$, trục ox và đường thẳng $x = 1$ xoay quanh ox, oy .